5. Übung zu Methoden der Signalverarbeitung

Wigner-Ville-Verteilung

1 Ambiguitätsfunktion

Die Ambiguitätsfunktion $A_{xx}(\tau,\vartheta)$ ist ein Maß für die Ähnlichkeit eines zeit- und frequenzverschobenen Signals zum ursprünglichen Signal:

$$\begin{aligned} A_{xx}(\tau,\vartheta) &= \left\langle x\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\exp\left(\mathrm{j}\,2\pi\frac{\vartheta}{2}t\right), x\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\exp\left(-\mathrm{j}\,2\pi\frac{\vartheta}{2}t\right)\right\rangle_t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t+\frac{\tau}{2}\right)x^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi\vartheta t}\,\mathrm{d}\,t \end{aligned}$$

Der Satz von Parseval führt zu einer äquivalenten Darstellung:

$$\begin{aligned} A_{xx}(\tau,\vartheta) &= \left\langle X\left(f-\frac{\vartheta}{2}\right)\exp\left(\mathrm{j}\,2\pi\frac{\tau}{2}f\right), X\left(f+\frac{\vartheta}{2}\right)\exp\left(-\mathrm{j}\,2\pi\frac{\tau}{2}f\right)\right\rangle_f \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X\left(f-\frac{\vartheta}{2}\right)X^*\left(f+\frac{\vartheta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi f\tau}\,\mathrm{d}\,f \end{aligned}$$

Die Ambiguitätsfunktion hat folgende Eigenschaften:

1. **Zeit- und Frequenzverschiebung:**

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t-t_x) \quad &&\circ\!\!-\!\!\bullet \quad A_{x'x'}(\tau,\vartheta) = A_{xx}(\tau,\vartheta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi\vartheta t_x} \\ x'(t) &= x(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi f_x t} \quad &&\circ\!\!-\!\!\bullet \quad A_{x'x'}(\tau,\vartheta) = A_{xx}(\tau,\vartheta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi f_x \tau} \end{aligned}$$

2. **Signalenergie:**

$$E_x = A_{xx}(0,0)$$

2 Wigner-Ville-Verteilung

2.1 Definition

Die Wigner-Ville-Verteilung entsteht durch Fourier-Transformation der Ambiguitätsfunktion bezüglich τ und ϑ:

$$\begin{aligned}
W_{xx}(t,f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{xx}(\tau,\vartheta)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi(\vartheta t + f\tau)}\ \mathrm{d}\,\vartheta\, \mathrm{d}\,\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t+\frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi f\tau}\ \mathrm{d}\,\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} X\left(f-\frac{\vartheta}{2}\right) X^*\left(f+\frac{\vartheta}{2}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi\vartheta t}\ \mathrm{d}\,\vartheta
\end{aligned}$$

2.2 Eigenschaften

1. **Integration über Zeit und Frequenz:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(t,f)\ \mathrm{d}\,t = |X(f)|^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(t,f)\ \mathrm{d}\,f = |x(t)|^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(t,f)\ \mathrm{d}\,t\ \mathrm{d}\,f = E_x$$

2. **Translationsinvarianz:**

$$\begin{aligned}
x'(t) &= x(t-t_x) && \circ\!\!-\!\!\bullet\quad W_{x'x'}(t,f) = W_{xx}(t-t_x,f) \\
x'(t) &= x(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi f_x t} && \circ\!\!-\!\!\bullet\quad W_{x'x'}(t,f) = W_{xx}(t,f-f_x) \\
x'(t) &= x(t-t_x)\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi f_x t} && \circ\!\!-\!\!\bullet\quad W_{x'x'}(t,f) = W_{xx}(t-t_x,f-f_x)
\end{aligned}$$

3. **Affininvarianz:**

$$x_a(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} x\left(\frac{t}{a}\right) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad W_{x_a x_a}(t,f) = W_{xx}\left(\frac{t}{a}, af\right)$$

4. **Reellwertigkeit:**

$$\forall x(t) : W_{xx}(t,f) \in \mathbb{R}$$

5. **Hohe Auflösung:**
   Die Wigner-Ville-Verteilung ist nicht dem Leckeffekt unterworfen. Für diese Zeit-Frequenz-Darstellung gilt folglich die Unschärferelation nicht. Die Wigner-Ville-Verteilung eines Dirac-Impulses ist wieder ein Dirac-Impuls: $\delta(t)\ \circ\!\!-\!\!\bullet\ W_{\delta\delta}(t,f) = \delta(t)$.

6. **Moyals Formel:**

$$|\langle x(t),y(t)\rangle_t|^2 = \langle W_{xx}(t,f),W_{yy}(t,f)\rangle_{t,f} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(t,f)W_{yy}(t,f)\;\mathrm{d}\,t\;\mathrm{d}\,f$$

Folgerungen aus Moyals Formel:

- **Spektrogramm:**

$$\begin{aligned} S_x^{\gamma}(t,f) &= |F_x^{\gamma}(t,f)|^2 = \left|\left\langle x(t'),\ \gamma(t'-t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi f t'}\right\rangle_{t'}\right|^2 \\ &= \left\langle W_{xx}(t',f'), W_{\gamma\gamma}(t'-t,f'-f)\right\rangle_{t',f'} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(t',f')W_{\gamma\gamma}(t'-t,f'-f)\;\mathrm{d}\,t'\;\mathrm{d}\,f' = W_{xx}(t,f) \underset{t',f'}{\overset{*}{*}} W_{\gamma\gamma}(-t,-f) \end{aligned}$$

Hinweis: Für reelle symmetrische Fenster gilt: $W_{\gamma\gamma}(-t,-f) = W_{\gamma\gamma}(t,f)$.

- **Skalogramm:**

$$\begin{aligned} \left|W_x^{\psi}(a,b)\right|^2 &= \left|\left\langle x(t), \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\right\rangle_t\right|^2 \\ &= \left\langle W_{xx}(t,f), W_{\psi\psi}\left(\frac{t-b}{a},af\right)\right\rangle_{t,f} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(t,f)W_{\psi\psi}\left(\frac{t-b}{a},af\right)\;\mathrm{d}\,t\;\mathrm{d}\,f \end{aligned}$$

2.3 Signalrekonstruktion

Unterscheiden sich zwei Signale $x(t)$ und $x'(t)$ nur um einen konstanten Faktor $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$, sind ihre Wigner-Ville-Verteilungen identisch:

$$\begin{aligned} x'(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\varphi}\cdot x(t) \quad \Rightarrow \quad W_{x'x'}(t,f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\varphi}\,x\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\varphi}\,x^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi f\tau}\;\mathrm{d}\,\tau \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\varphi}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\varphi}\cdot W_{xx}(t,f) = W_{xx}(t,f) \end{aligned}$$

Folglich kann die Phasenlage eines Signals $x(t)$ nicht rekonstruiert werden. Dasselbe gilt für die Rekonstruktion des Spektrums $X(f)$. Die Rekonstruktionsvorschriften lauten:

$$\hat{x}(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}\left(\frac{t}{2},f\right)\mathrm{e}^{2\,\mathrm{j}\,\pi f t}\;\mathrm{d}\,f}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(0,f)\,\mathrm{d}\,f}}$$

$$\hat{X}(f) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} W_{xx}\left(t,\frac{f}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi f t}\;\mathrm{d}\,t}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(t,0)\,\mathrm{d}\,t}}$$

2.4 Kreuzterme

Durch die Quadrierung des Signals bei der Berechnung der Wigner-Ville-Verteilung entstehen so genannte Kreuzterme oder Interferenzterme. Dies wird deutlich, wenn die Wigner-Ville-Verteilung einer Summe von Signalen berechnet wird:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad W_{xx}(t,f) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_i c_j^* W_{x_i x_j}(t,f)$$

Hierbei stellen die gewichteten Auto-Wigner-Ville-Verteilungen $|c_i|^2 \, W_{x_i x_i}(t,f)$ für $i = j$ den erwünschten Anteil der Zeit-Frequenz-Darstellung dar, die gewichteten Kreuz-Wigner-Ville-Verteilungen für $i \neq j$ sind störende Interferenzterme.

Beispiel 1 (Wigner-Ville-Verteilung eines Cosinus-Signals)
Bei der Wigner-Ville-Verteilung eines Cosinus-Signals tritt ein Kreuzterm zwischen dem positiven und negativen Frequenzanteil auf:

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi f_0 t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi f_0 t}\right) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad W_{xx}(t,f) = \frac{1}{2}\delta(f-f_0) + \frac{1}{2}(f+f_0) + \underbrace{\cos(4\pi f_0 t)\delta(f)}_{\text{Kreuzterm}}$$

■

Die Kreuzterme sind oft so stark ausgeprägt, dass es unmöglich ist, bei der Wigner-Ville-Verteilung das Nutzsignal zu erkennen. Daher werden im Folgenden Methoden vorgestellt, mit deren Hilfe Interferenzen unterdrückt werden können:

1. **Analytisches Signal**
   Bei reellen Signalen ist es sinnvoll das analytische Signal zu transformieren. Dadurch werden Interferenzen zwischen positiven und negativen Frequenzanteilen wie in Beispiel 1 vermieden.

2. **Cohen-Klasse**
   Bei der Ambiguitätsfunktion $A_{xx}(\tau,\vartheta)$ ist das Nutzsignal um den Ursprung konzentriert, während die Kreuzterme weiter von diesem entfernt liegen. Durch Multiplikation mit einer zweidimensionalen Tiefpassfunktion $\Phi(\tau,\vartheta)$ (*Kernfunktion*) können die Kreuzterme daher gedämpft werden. Bezüglich der Wigner-Ville-Verteilung bedeutet dies eine zweifache Faltung mit der zweifach Fourier-Transformierten der Kernfunktion:

   $$C_{xx}(t,f) = W_{xx}(t,f) \underset{t',f'}{\overset{*}{*}} \mathcal{F}_\tau\{\mathcal{F}_\vartheta\{\Phi(\tau,\vartheta)\}\} = W_{xx}(t,f) \underset{t',f'}{\overset{*}{*}} \Pi(t,f)$$

   Dabei wird $\Pi(t,f) = \mathcal{F}_\tau\{\mathcal{F}_\vartheta\{\Phi(\tau,\vartheta)\}\}$ als *Glättungsfunktion* bezeichnet. Einige Vertreter der Cohen-Klasse sind in Tabelle 1 wiedergegeben.

   Die Smoothed Pseudo-Wigner-Ville-Verteilung mit ihrer separierbaren Glättungsfunktion $\Pi(t,f) = g(t) \cdot H(f)$ eignet sich für eine anschauliche Interpretation der Cohen-Klasse. Dazu wird als Kernfunktion eine zweidimensionale Rechteckfunktion angesetzt:

   $$\Phi(\tau,\vartheta) = G(-\vartheta) \cdot h(\tau) = r_{T_{\text{eff}}}(\tau) \cdot r_{F_{\text{eff}}}(\vartheta)$$

Verteilung	Glättungsfunktion
Spektrogramm $S_x^\gamma(t,f)$	$\Pi(t,f) = W_{\gamma\gamma}(-t,-f)$
Choi-Williams-Verteilung $\mathrm{CW}_{xx}(t,f)$	$\Pi(t,f) = \mathcal{F}_\tau \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{\alpha\tau^2}} \exp\left(-\frac{\pi^2 t^2}{\alpha\tau^2}\right) \right\}$
Wigner-Ville-Verteilung $W_{xx}(t,f)$	$\Pi(t,f) = \delta(t) \cdot \delta(f)$
Pseudo-Wigner-Ville-Verteilung $W_{xx}^{(PW)}(t,f)$	$\Pi(t,f) = \delta(t) \cdot H(f)$
Smoothed Pseudo-Wigner-Ville-Verteilung $W_{xx}^{(SPW)}(t,f)$	$\Pi(t,f) = g(t) \cdot H(f)$

Tabelle 1: Vertreter der Cohen-Klasse

Durch geeignete Umformungen kann die Smoothed Pseudo-Wigner-Ville-Verteilung dann folgendermaßen dargestellt werden (vgl. Vorlesungsskript):

$$\begin{aligned} W_{xx}^{(SPW)}(t,f) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t-t') \int_{\tau=-T_{\text{eff}}/2}^{T_{\text{eff}}/2} x\left(t'+\frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t'-\frac{\tau}{2}\right) \exp(-\mathrm{j}\,2\pi f\tau)\ \mathrm{d}\,\tau\ \mathrm{d}\,t' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H(f-f') \int_{\vartheta=-F_{\text{eff}}/2}^{F_{\text{eff}}/2} X\left(f'-\frac{\vartheta}{2}\right) X^*\left(f'+\frac{\vartheta}{2}\right) \exp(-\mathrm{j}\,2\pi\vartheta t)\ \mathrm{d}\,\vartheta\ \mathrm{d}\,f' \end{aligned}$$

Dies führt zu folgender Deutung:

- Durch die Begrenzung der Integrationsintervalle werden Signalanteile, die zeitlich weiter als T_{eff} bzw. spektral weiter als F_{eff} auseinander liegen nicht miteinander verglichen und können folglich auch keine Kreuzterme miteinander bilden. Je schmaler die Rechteckfenster, desto wirkungsvoller ist die Unterdrückung der Kreuzterme.
- Durch die Filterung entsteht ein Leckeffekt. Dieser ist umso stärker, je schmaler die Rechteckfenster gewählt werden.

Allgemein gilt für die Cohen-Klasse, dass die Unterdrückung der Kreuzterme stets durch eine Verschlechterung der Auflösung erkauft wird. Dies erklärt die schlechtere Auflösung des Spektrogramms gegenüber der Wigner-Ville-Verteilung.

3. **Reassignment-Methode**

   Bei der Reassignment-Methode handelt es sich um einen heuristischen Ansatz, bei dem durch eine geeignete Transformation der Koordinaten (t,f) eine Umsortierung der einzelnen Punkte einer Verteilung erfolgt, die häufig zu einer Verbesserung der Auflösung führt. Sie lässt sich sowohl auf die Vertreter der Cohen-Klasse als auch der Affinen Klasse anwenden.

4. **Signalabhängige Filterung**

   Kreuzterme können wirkungsvoll unterdrückt werden, indem die Wigner-Ville-Verteilung beispielsweise mit einem Spektrogramm multipliziert wird. Während das Spektrogramm Kreuzterme ausblendet, bewirkt die Wigner-Ville-Verteilung umgekehrt eine Ausblendung der unscharfen Bereiche des Spektrogrammes. Die Auflösung der Wigner-Ville-Verteilung wird daher nicht verschlechtert.

2.5 Diskrete Wigner-Ville-Verteilung

Die diskrete Wigner-Ville-Verteilung eines Signals $x(n)$, $n = 0, \ldots, N-1$ lautet:

$$W_{xx}(n,k) = 2 \cdot \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} x(n+m)x^*(n-m)\exp(-\,\mathrm{j}\,4\pi km/N)$$

Um Aliasing zu vermeiden, muss das Signal bandbegrenzt sein, da durch den Exponentialterm periodische Wiederholungen in Frequenzrichtung mit der Periode $f_\mathrm{A}/2$ auftreten. Für die größte vorkommende Signalfrequenz f_g muss somit gelten: $f_\mathrm{g} < f_\mathrm{A}/4$. Wird lediglich das Shannonsche Abtasttheorem $f_\mathrm{g} < f_\mathrm{A}/2$ erfüllt, muss das Signal durch Upsampling mit dem Faktor 2 vorverarbeitet werden.
Ist das Signal reell und erfüllt das Shannonsche Abtasttheorem, kann auf das Upsampling verzichtet werden, wenn mit dem analytischen Signal gerechnet wird, da dadurch die Signalenergie vom ursprünglichen Intervall $[-f_\mathrm{g}, f_\mathrm{g}]$ auf das Intervall $[0, f_\mathrm{g}]$ begrenzt wird. Somit treten durch die periodische Wiederholung mit $f_\mathrm{A}/2 > f_\mathrm{g}$ keine spektralen Überlappungen auf.

Aufgabe 1: Eigenschaften der Wigner-Ville-Verteilung

Zeigen Sie, dass die Auto-Wigner-Ville-Verteilung reell ist, selbst wenn das Signal komplex ist.

Aufgabe 2: Kreuzterme

Gegeben ist folgendes Signal:

$$y(t) = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi f_0 t}$$

a) Bestimmen Sie den Wignerkern

$$w_{yy}(t,\tau) = y\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \cdot y^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

b) Bestimmen Sie die Verteilung

$$W_{yy}(t,f) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{yy}(t,\tau)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi f\tau}\;\mathrm{d}\,\tau$$

c) Welcher Term des Ergebnisses entspricht dem Nutzterm, welcher dem Kreuzterm?

Aufgabe 3: Ambiguitätsfunktion, Moyals Formel

Gegeben ist folgendes Signal:

$$x(t) = \exp(-\beta t^2)$$

a) Berechnen Sie die Ambiguitätsfunktion $A_{xx}(\tau,\vartheta)$ des Signals $x(t)$

b) Bestimmen Sie die Signalenergie E_x

c) Wie lautet die Wigner-Ville-Verteilung $W_{xx}(t,f)$ des Signals $x(t)$

d) Zeigen Sie, dass

$$|\langle x(t), x(t)\rangle_t|^2 = \langle W_{xx}(t,f), W_{xx}(t,f)\rangle_{t,f}$$

gilt.

Aufgabe 4: Choi-Williams-Verteilung

Nach Abschnitt 2.4 ist die Cohen-Klasse

$$C_{xx}(t,f) = W_{xx}(t,f) \underset{t',f'}{\ast\ast} \mathcal{F}_\tau\{\mathcal{F}_\vartheta\{\Phi(\tau,\vartheta)\}\} = W_{xx}(t,f) \underset{t',f'}{\ast\ast} \Pi(t,f)$$

identisch mit dem Spektrogramm $S_x^\gamma(t,f)$, wenn für die Glättungsfunktion

$$\Pi(t,f) = W_{\gamma\gamma}(-t,-f) = W_{\gamma^\sharp\gamma^\sharp}(t,f)\,, \qquad \gamma^\sharp(t) := \gamma^*(-t)$$

gilt. Das bedeutet, dass die Kernfunktion $\Phi(\tau,\vartheta)$ die Ambiguitätsfunktion einer Fensterfunktion $\gamma^\sharp(t)$ ist:

$$\Phi(\tau,\vartheta) = A_{\gamma^\sharp\gamma^\sharp}(\tau,\vartheta)$$

Zeigen Sie, dass die Choi-Williams-Verteilung mit der Kernfunktion

$$\Phi(\tau,\vartheta) = \exp(-\alpha\vartheta^2\tau^2)$$

nicht als Spektrogramm interpretiert werden kann.

Hinweis: Leiten Sie zunächst eine Methode her, mit der ein Signal aus seiner Ambiguitätsfunktion rekonstruiert werden kann. Zeigen Sie dann, dass kein Signal existiert, dessen Ambiguitätsfunktion der Kernfunktion der Choi-Williams-Verteilung entspricht.

Aufgabe 5: Moyals Formel

Ein periodisches Signal $y(t)$ wird in eine Fourier-Reihe entwickelt:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi k f_0 t}$$

a) Berechnen Sie die Wigner-Ville-Verteilung $W_{yy}(t,f)$ des Signals.

b) Geben Sie das Signal $\tilde{W}_{yy}(t,f)$ an, das nur aus den Autotermen der Wigner-Ville-Verteilung zusammengesetzt ist.

c) Berechnen Sie mit Hilfe von Moyals Formel das Spektrogramm $S_y^{\gamma}(t,f)$. Als Analysefenster soll der Gauß-Impuls

$$\gamma(t) = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{\beta}{2}t^2\right)$$

verwendet werden.

d) Berechnen Sie mit Hilfe von Moyals Formel das Skalogramm $\left|W_y^{\psi}(a,b)\right|^2$. Als Analysewavelet soll das Gabor-Wavelet

$$\psi(t) = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{\beta}{2}t^2\right) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi f_x t}$$

verwendet werden.